MINISTERUL EDUCAȚIEI

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024**

**CLASA a IX- a**

**BAREM DE CORECTARE**

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

**Problema 1**

a ) Arătați că : $x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}$ ; x, y $\in (0, +\infty)$

b) Fie ; a, b $\in (0, +\infty)$. Arătați că $\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2}\right)^3 + \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{a^2}{b^2}\right)^3 \geq 54$

G.M. Nr 3/2023

*Soluție :*

a) $x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4} \Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq x^2y + y^2x$ , x, y $\in (0, +\infty)$……………………..1p
$x^2(x-y)$-$y^2(x-y) \geq 0$ .Finalizare $(x-y)^2(x+y) \geq 0$……………………1p

b) Folosim inegalitatea de la punctul a și avem
A=$\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2}\right)^3 + \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{a^2}{b^2}\right)^3 \geq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2} + 1 + \frac{b}{a} + \frac{a^2}{b^2}\right)^3$ ........................2p
Dar $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ , $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 2$..........................................................................1p
Finalizare A$\geq$ $\frac{1}{4}(2+2+2)^3 = \frac{216}{4}$=54 ............................................................2p

**Problema 2**

Fie ABC un triunghi oarecare și O $\in Int(\Delta ABC)$,un punct oarecare. Notăm AO$\cap BC = \{A'\}$, BO$\cap CA = \{B'\}$ ,CO$\cap AB = \{C'\}$ și $B'C' \cap AO = \{D\}$.

a) Dacă $\frac{BO}{BB'} = \frac{3}{4}$ ,arătați că $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BB'}$ .

b) Să se arate că produsul $\frac{C'D}{B'D} \cdot \frac{B'C}{C'B}$ nu depinde de alegerea punctului O.

*Soluție :*

a) Aplicăm regula triunghiului : $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BB'}$ și $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'O}$ .........................1p
   Finalizare...........................................................................................................1p
b) Aplicarea teoremei lui Ceva in $\Delta ABC$ : $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$ ............................... 1p

Aplicarea teoremei lui Menelaus in $\Delta BB'C'$ cu transversala A-D-O : $\frac{C'D}{B'D} \cdot \frac{B'O}{OB} \cdot \frac{AB}{AC'} = 1$ .......1p

Aplicarea teoremei lui Menelaus in $\Delta BB'C$ cu transversala A-O-$A'$ : $\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{OB}{OB'} \cdot \frac{AB'}{AC} = 1$ .......1p

Prin înmulțirea celor 3 relații rezultă $\frac{C'D}{B'D} \cdot \frac{B'C}{C'B} = \frac{AC}{AB}$ ..........................................................2p

**Problema 3**

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $[x+2024]$ - $\left[\frac{5x-2024}{2}\right]$ = $\frac{x}{2}$ +2024, unde [a] reprezintă partea întreagă a numărului real a.

*Soluție:*

$[x+2024]$ - $\left[\frac{5x-2024}{2}\right]$ = $\frac{x}{2}$ + 2024

Știm că $[a] \in \mathbb{Z}$ ,$\forall a \in \mathbb{R}$ deci $[x+2024]$, $\left[\frac{5x-2024}{2}\right]$, $2024 \in \mathbb{Z}$ => $\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$ => x=2k, $k \in \mathbb{Z}$.......3p

$[x+2024]$=$[2k+2024]$=2k+2024$\in \mathbb{Z}$ ........................................................................1p

$\left[\frac{5x-2024}{2}\right] = \left[\frac{10k-2024}{2}\right]$=[5k-1012]=5k-1012$\in \mathbb{Z}$ ..................................................................1p

Ecuația devine:

2k+2024 - (5k-1012) = k+2024 ..........................................................................................1p

2k+2024 - 5k+1012 = k+2024

4k=1012=> k=253=> x=506...........................................................................................1p

**Problema 4**

Se consideră intervalul (a,b) de numere reale care conține exact două numere întregi.

a) Arătați că $\frac{[b]+[a]}{[b]-[a]}$ se află în intervalul (a,b), unde [a] este partea întreagă a numărului real a.

b) Dacă $|b-a-3| = a^2+b^2+\frac{a}{2}-6b+\frac{149}{16}$ determinați numerele reale a și b.

Barem :

a) Fie n, n+1 numerele întregi din intervalul (a,b).

Atunci $n-1<a<n<n+1<b<n+2$, deci [a]=n-1 și [b]=n+1 …………………………...1p

$\frac{[b]+[a]}{[b]-[a]} = \frac{n+1+n-1}{n+1-n+1} = n \in (a,b)$ ……………….…………………………………...1p

b) Din inegalitatea de la punctul a: $n-1<a<n<n+1<b<n+2$ rezultă $b-a<n+2-(n-1)=3$ ... 1p

Deci $b-a-3<0 \Rightarrow |b-a-3| = a-b+3$ …………………......................1p

$|b-a-3| = a^2+b^2+\frac{a}{2}-6b+\frac{149}{16}$ devine $(4a-1)^2+(4b-10)^2=0$ .........2p

Finalizare $a=\frac{1}{4}, b=\frac{5}{2}$ .........................................................................................1p