**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024**

**CLASA a VII - a**

**BAREM DE CORECTARE**

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

**Problema 1**

a) Demonstrați că: $\frac{1}{(k-\sqrt{2})(k+1-\sqrt{2})}=\frac{1}{(k-\sqrt{2})}-\frac{1}{(k+1-\sqrt{2})},(\forall)k\in\mathbb{N}$.

b) Dacă $x=\frac{44+24\sqrt{2}}{98}$ și $y=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}-4)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-9)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}-10)^2}}$, atunci $\frac{y}{x}\in\mathbb{Z}$.

***Soluție:***

a) $\frac{1}{(k-\sqrt{2})(k+1-\sqrt{2})}=\frac{(k+1-\sqrt{2})-(k-\sqrt{2})}{(k-\sqrt{2})(k+1-\sqrt{2})}=\frac{k+1-\sqrt{2}}{(k-\sqrt{2})(k+1-\sqrt{2})}-\frac{k-\sqrt{2}}{(k-\sqrt{2})(k+1-\sqrt{2})}=$

$=\frac{1}{(k-\sqrt{2})}-\frac{1}{(k+1-\sqrt{2})}$, $(\forall)k\in\mathbb{N}$ ............................................................2p

b) $y=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}-4)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-9)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}-10)^2}}=$

$=\frac{1}{|\sqrt{2}-2|\cdot|\sqrt{2}-3|}+\frac{1}{|\sqrt{2}-3|\cdot|\sqrt{2}-4|}+\cdots+\frac{1}{|\sqrt{2}-9|\cdot|\sqrt{2}-10|}=$

$=\frac{1}{2-\sqrt{2}}-\frac{1}{3-\sqrt{2}}+\frac{1}{3-\sqrt{2}}-\frac{1}{4-\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{9-\sqrt{2}}-\frac{1}{10-\sqrt{2}}=$ .........................................2p

$=\frac{1}{2-\sqrt{2}}-\frac{1}{10-\sqrt{2}}=\frac{8}{22-12\sqrt{2}.}$...............................................................................1p

Deci, $\frac{y}{x}=\frac{8}{22-12\sqrt{2}.}\cdot\frac{98}{44+24\sqrt{2}}=\frac{98}{49}=2\in\mathbb{Z}$ ......................................................2p

**Problema 2**

Aflați numerele prime $p$ și $q$ de două cifre, pentru care $pq+1$ este pătrat perfect.

***Soluție:***

Presupunem că $p<q$ și notăm $pq+1=x^2, x\in \mathbf{N}^*$……………………………………………..1p

Atunci $pq=x^2-1=(x-1)(x+1)$………………………………………..………..........….1p

Cum $x>0$ avem $p=x-1$ și $q=x+1$……………………………….………….........…..1p

Avem $q-1=p+1$ deci $q=p+2$……………………………………….…………....….1p

$p$, $q$ numere prime de două cifre cu $q-p=2$ se obțin perechile:

$(11,13)$, $(17,19)$, $(29,31)$, $(41,43)$, $(59,61)$, și $(71,73)$. ……………………………....3p

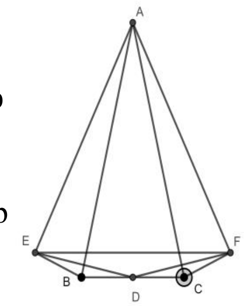
**Problema 3**

Se dă un triunghi ascuțitunghic $ABC$, $AB = AC$. Fie $D$ mijlocul laturii $BC$, iar $E$ și $F$ simetricele punctului $D$ față de dreptele $AB$, respective $AC$.

a. Demonstrați că patrulaterul $BCFE$ este trapez isoscel.

b. Demonstrați că patrulaterul $AEDF$ este romb dacă și numai dacă triunghiul $ABC$ este echilateral.

***Soluție:***




a. Arată că $\Delta AEF$ este isoscel……………………………….…….………....1p

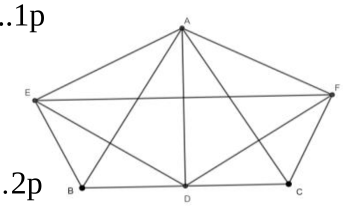
Din $\Delta ABC$ isoscel avem $AD$ bisectoare $\widehat{BAC}$, deciAD bisectoare

$\sphericalangle EAF$……………………………………………………..…………..1p

$AD \perp BC$ si $AD \perp EF \Rightarrow EF \parallel BC$ (1)

$EB = BD = DC = CF.$ (2)

Din (1) și (2) avem $EBCF$ trapez isoscel....................................................1p




b. ”⟹” $AE = ED = AD \Longrightarrow \triangle AED$ este echilateral

$AB \perp ED \Longrightarrow AB$ bisectoare $\sphericalangle EAD \Longrightarrow \sphericalangle BAD = 30^{o} \Longrightarrow \sphericalangle BAC = 60^{o}$

$\Longrightarrow \Delta ABC$ este echilateral…………..…….…………………………..……2p

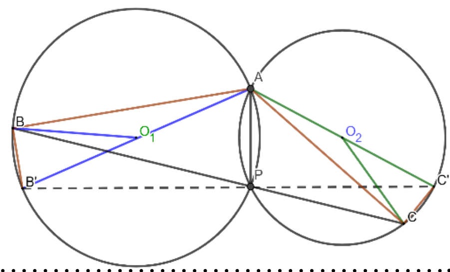
”⟸” $\Delta AED \equiv \Delta AFD$ , iar $\Delta AED$ și $\Delta AFD$ sunt echilaterale
$\Longrightarrow AEDF$ este romb……………………………………………………….2p

**Problema 4**

Cercurile $C_1(O_1, r_1)$ și $C_2(O_2, r_2)$ se intersectează în $A$ și $P$, iar secanta $BP$, $B \in C_1(O_1, r_1)$, intersectează $C_2(O_2, r_2)$ în $C$. Fie $B'$, respectiv $C'$ diametral opuse lui $A$ în $C_1(O_1, r_1)$, respectiv $C_2(O_2, r_2)$. Arătați că:

a) Punctele $B', P, C'$ sunt coliniare;

b) $\sphericalangle O_1BA \equiv \sphericalangle O_2CA$.




***Soluție:***

Desenul ……………………………………………………………………………………….1p

a) $\sphericalangle APB' = 90°$ si $\sphericalangle APC' = 90°$, deci $\sphericalangle APB' + \sphericalangle APC' = 180°$……………………1p

$\sphericalangle C'PB' = 180°$ , deci punctele $B', P, C'$ sunt coliniare………………………………1p

b) $O_1B = O_1A = r_{1,}$, deci $\sphericalangle O_1BA \equiv \sphericalangle O_1AB$……………………………………………1p

APB′B patrulater inscriptibil, deci $\sphericalangle O_1AB \equiv \sphericalangle BPB'$…………………………………..1p

Analog $\sphericalangle O_2CA \equiv \sphericalangle O_2AC$ și $\sphericalangle O_2AC \equiv \sphericalangle CPC'$ ……………………………………..1p

$\sphericalangle BPB' \equiv \sphericalangle CPC'$ (unghiuri opuse la vârf), deci $\sphericalangle O_1BA \equiv \sphericalangle O_2CA$ ..……………….…….1p