OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024

CLASA a XI-a

BAREM DE CORECTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Problema 1. a) Se dă matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care îndeplinește condițiile: $\operatorname{tr}A = \sqrt{504}$ și $\det A = 4 + 2\sqrt{2}$. Calculați $\det\left(A^2 + 4I_2\right)$.

b) Demonstrați că $\det(A+B) + \det(A-B) = 2\det A + 2\det B$, pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

c) Demonstrați că, oricare ar fi matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det(AB - BA) \geq 0$, are loc relația

$$(\det C)^2 - 2\sqrt{\det(AB - BA)} \cdot \det C + \det\left(A^2 + B^2\right) \geq 0.$$

Soluție:

a) Din relația Cayley-Hamilton, avem:

$$A^2 + 4I_2 = \operatorname{tr}A \cdot A - (\det A - 4)I_2 = \sqrt{504} \cdot A - 2\sqrt{2}I_2 \Rightarrow$$

$A^2 + 4I_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{504}a - 2\sqrt{2} & \sqrt{504}b \\ \sqrt{504}c & \sqrt{504}d - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 1p

$\det\left(A^2 + 4I_2\right) = 504ad - \sqrt{504} \cdot 2\sqrt{2}(a+d) + 8 - 504bc =$

$= 504\left(4 + 2\sqrt{2}\right) - 504 \cdot 2\sqrt{2} + 8 = 2016 + 8 = 2024.$ 1p

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ și apoi prin calcul direct. 1p

c) Deoarece relația are loc oricare ar fi matricea C, este suficient să demonstrăm că discriminantul asociat este negativ, adică $4\left(\det(AB - BA) - \det\left(A^2 + B^2\right)\right) \leq 0.$

$(A + iB)(A - iB) = A^2 - iAB + iBA + B^2 = A^2 + B^2 - i(AB - BA).$ (1)

$(A - iB)(A + iB) = A^2 + iAB - iBA + B^2 = A^2 + B^2 + i(AB - BA).$ (2) 1p

$(1) \Rightarrow \det\left(\left(A+iB\right)\left(A-iB\right)\right)=\det\left(A+iB\right)\cdot\det\left(A-iB\right)=\det\left(A^2+B^2-i\left(AB-BA\right)\right)$

$(2) \Rightarrow \det\left(\left(A-iB\right)\left(A+iB\right)\right)=\det\left(A-iB\right)\cdot\det\left(A+iB\right)=\det\left(A^2+B^2+i\left(AB-BA\right)\right)$ 1p

Prin adunarea ultimelor două relații și, ținând cont de punctul b), avem:

$2\det\left(A^2+B^2\right)+2\det\left(i\left(AB-BA\right)\right)=2\det\left(A-iB\right)\cdot\det\left(A+iB\right)\Leftrightarrow$

$\det\left(A^2+B^2\right)-\det\left(\left(AB-BA\right)\right)=\det\left(A-iB\right)\cdot\det\left(A+iB\right)\geq 0$ 1p

$\Rightarrow \det\left(A^2+B^2\right)-\det\left(\left(AB-BA\right)\right)\geq 0 \Leftrightarrow \det\left(AB-BA\right)-\det\left(A^2+B^2\right)\leq 0$ 1p

Problema 2. Fie $A \in M_3(\mathbb{N}^*)$ o matrice pentru care suma elementelor pe fiecare linie, coloană și diagonală este aceeași. Arătați că $\det A$ este divizibil cu suma tuturor elementelor matricei A.

G.M. Nr.1/2023, Ion Pătrașcu, Craiova

Soluție:

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Notăm s suma elementelor de pe fiecare linie, coloană, respectiv diagonală din matricea A.

Se observă că $s=(a+e+i)+(d+e+f)+(c+e+g)-(a+d+g)-(c+f+i)=3e$ 2p

$\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ s & s & s \end{vmatrix}=s\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$ 2p

$=s\cdot\begin{vmatrix} a & b & a+b+c \\ d & e & d+e+f \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=s\cdot\begin{vmatrix} a & b & s \\ d & e & s \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=s\cdot\begin{vmatrix} a & b & 3e \\ d & e & 3e \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3s\cdot\begin{vmatrix} a & b & e \\ d & e & e \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 2p

Deoarece $a,b,d,e\in\mathbb{N}^*$, avem că $\begin{vmatrix} a & b & e \\ d & e & e \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\in\mathbb{Z}$, adică $3s\cdot\begin{vmatrix} a & b & e \\ d & e & e \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,\vdots\,3s$. Deci $\det A$ este divizibil cu suma tuturor elementelor matricei A 1p

Problema 3. Calculați:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{3^x-3}$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{\sum_{i=1}^{n}x^{a_i}-n}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,x}-\sum_{i=1}^{n}a_i}$, unde $a_i>0,(\forall)\,i=\overline{1,n},\ n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{3^x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^3-1}{x-1}}{3\frac{3^{x-1}-1}{x-1}}=$ 2p

$=\frac{1}{ln3}$ 1p

b) $\lim_{x\to 1}\frac{\sum_{i=1}^{n}x^{a_i}-n}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,x}-\sum_{i=1}^{n}a_i}=\lim_{x\to 1}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{a_i}-1}{x-1}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\,x}-a_i}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{a_i}-1}{x-1}}{\sum_{i=1}^{n}a_i\,\frac{a_i^{\,x-1}-1}{x-1}}=$ 2p

$=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\ln a_i\right)}$ 2p

Problema 4. Se consideră șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = 3^{2^n}+1$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n = 3^{2^n}-1$, $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n = a_1\dfrac{1}{x_1}+a_2\dfrac{2}{x_2}+\ldots+a_n\dfrac{2^{n-1}}{x_n}$, unde $a_i\in\{-1,1\}$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

a) Arătați că $\dfrac{1}{y_n}-\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{2}{y_{n+1}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Arătați că, dacă $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\dfrac{1}{8}$.

c) Arătați că șirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Soluție:

a) $\dfrac{1}{y_n}-\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{3^{2^n}-1}-\dfrac{1}{3^{2^n}+1}=\dfrac{2}{\left(3^{2^n}\right)^2-1}=\dfrac{2}{y_{n+1}}$ 1p

b) Deoarece $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$ rezultă că $z_n=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{2}{x_2}+\ldots+\dfrac{2^{n-1}}{x_n}$ 1p

Din punctul a) avem că:

$$\frac{1}{y_1}-\frac{1}{x_1}=\frac{2}{y_2}$$

$$\frac{1}{y_2}-\frac{1}{x_2}=\frac{2}{y_3}\Leftrightarrow\frac{2}{y_2}-\frac{2}{x_2}=\frac{2^2}{y_3}$$

....

$$\frac{1}{y_n}-\frac{1}{x_n}=\frac{2}{y_{n+1}}\Leftrightarrow\frac{2^{n-1}}{y_n}-\frac{2^{n-1}}{x_n}=\frac{2^n}{y_{n+1}}$$ 1p

Prin adunarea relațiilor obținem $\dfrac{1}{y_1}-\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{2}{x_2}-\ldots-\dfrac{2^{n-1}}{x_n}=\dfrac{2^n}{y_{n+1}}\Rightarrow z_n=\dfrac{1}{y_1}-\dfrac{2^n}{y_{n+1}}$ 1p

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{2^n}{3^{2^{n+1}}-1}\right)=\dfrac{1}{8}$ 1p

c) Avem că $z_n=u_n-v_n$, unde u_n este suma acelor termeni ai șirului z_n cu $a_i=1$, iar v_n este suma acelor termeni ai șirului z_n cu $a_i=-1$. Cum $(u_n)_{n\geq 1}$ este un șir crescător mărginit de șirul convergent $t_n=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{2}{x_2}+\ldots+\dfrac{2^{n-1}}{x_n}$ înseamnă că șirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este convergent 1p

Analog șirul $(v_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Deci șirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent 1p