OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024

CLASA a VIII - a

BAREM DE CORECTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Problema 1

a) Stabiliți cărui interval îi aparține fiecare din numerele reale a și b știind că:

$$9a^2-12a+4b^2-4b=20$$

b) Dacă $x-4y+1=0$ și $x\in[-1;3]$ aflați $A=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

Soluție:

a) Egalitatea este echivalentă cu $(3a-2)^2+(2b-1)^2=25$ ……………………………………1p

Avem imediat: $(3a-2)^2\le 25$ și $(2b-1)^2\le 25$ ……………………………………………1p

Obține: $-5\le 3a-2\le 5$ și $-5\le 2b-1\le 5 \Rightarrow a\in\left[-1;\frac{7}{3}\right]$ și $b\in[-2;3]$ ………………………1p

b) Din $x-4y+1=0$ avem imediat $x+1=4y$ și $x-3=4(y-1)$ ………………………………1p

Calculează $A=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(4y)^2+y^2}+\sqrt{[4(y-1)]^2+(y-1)^2}=$

$=\sqrt{17y^2}+\sqrt{17(y-1)^2}=\sqrt{17}(|y|+|y-1|)$ ……………………………………………………1p

Din $x\in[-1;3]$ și $x+1=4y$ obține $y\in[0;1]$ de unde: $|y|=y$ și $|y-1|=1-y$ …………………1p

Finalizează și găsește $A=\sqrt{17}$ ………………………………………………………………1p

Problema 2

a) Verificați identitatea: $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \ \forall n\in N^*$

b) Determinați partea întreagă a numărului:

$$a=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2023^2}+\frac{1}{2024^2}}$$

Soluție:

a) $1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{2(n+1)}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}=$ 1p

$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}==\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2$ 1p

Finalizează 1p

b) Folosind punctul a) și procedeul de sumare telescopică, obţinem că

$a=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+1+\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}$ 1p

$a=2024-\frac{1}{2024}$ 2p

$[a]=2023$ 1p

Problema 3

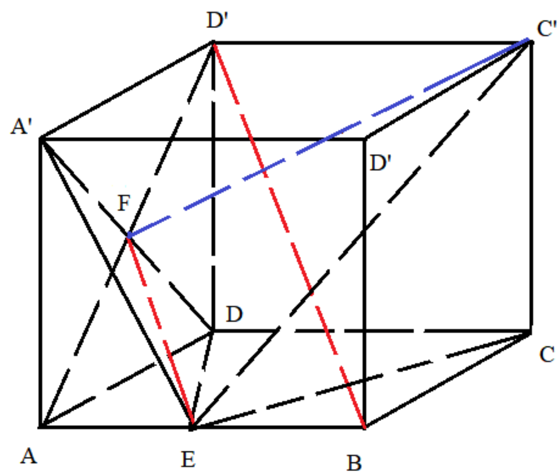
Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, E mijlocul segmentului AB și F centrul feței $ADD'A'$.

Să se arate că:

a) $BD' \parallel (A'ED)$;

b) $C'F \perp (A'ED)$

Soluție:



a) F mijlocul segmentului AD' 1p

EF linie mijlocie în $\Delta ABD'$ $\Rightarrow$ $EF \parallel BD'$ 1p

$BD' \parallel EF$, $EF \subset (A'ED)$, $BD' \not\subset (A'ED)$ $\Rightarrow$ $BD' \parallel (A'ED)$ 1p

b) $\Delta A'C'D$ echilateral, $C'F$ mediană $\Rightarrow$ $C'F$ înălțime $\Rightarrow C'F \perp A'D$ 1p

Fie $AB = a$ $\Rightarrow C'F = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $EF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $C'E = \dfrac{3a}{2}$ 1p

Din reciproca th. Pitagora în $\Delta C'FE$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle C'FE = 90^0$ $\Rightarrow$ $C'F \perp FE$ 1p

$C'F \perp A'D$, $C'F \perp FE$, $A'D \cap FE = \{F\}$ $\Rightarrow$ $C'F \perp (A'ED)$ 1p

Problema 4

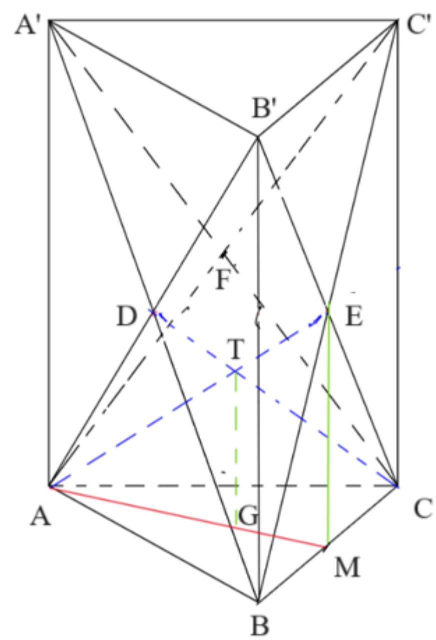
Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă.

a) Determinați dreapta de intersecție a planelor $(A'BC)$ și $(B'AC)$;

b) Arătați că intersecția planelor $(A'BC)$, $(B'AC)$ și $(C'AB)$ este un punct T;

c) Arătați că $TG \perp (ABC)$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Soluție:



a) Din: $\left.\begin{array}{l} C \in (A'BC) \\ C \in (B'AC) \end{array}\right\} \Rightarrow C \in (A'BC) \cap (B'AC)$ (1)

Notăm: $A'B \cap AB' = \{D\}$

$\left.\begin{array}{l} D \in A'B \subset (A'BC) \Rightarrow D \in (A'BC) \\ D \in B'A \subset (B'AC) \Rightarrow D \in (B'AC) \end{array}\right\} \Rightarrow D \in (A'BC) \cap (B'AC)$ (2)

Din (1) și (2) finalizează: $(A'BC) \cap (B'AC) = CD$ …………………1p

b) Notăm: $B'C \cap BC' = \{E\}$ și $A'C \cap AC' = \{F\}$

Avem imediat: $(A'BC) \cap (C'AB) = BF$ și $(C'AB) \cap (B'AC) = AE$

În triunghiul $B'AC$, AE și CD sunt mediane și fie $AE \cap CD = \{T\}$ $\Rightarrow$

T - centrul de greutate al triunghiului $B'AC$ și $\dfrac{AT}{TE} = 2$

Dar AE este mediană și în $\Delta C'AB \Rightarrow$ T este si centrul de greutate al $\Delta C'AB$ ………………..1p

Cum BF este și ea mediană în $\Delta C'AB$ $\Rightarrow$ $T \in BF$ ……………………………………………1p

Finalizează și găsește $(A'BC) \cap (B'AC) \cap (C'AB) = \{T\}$ …………………………………… 1p

c) Fie M mijlocul lui BC. Avem imediat $ME \| CC'$ și cum $CC' \perp (ABC) \Rightarrow EM \perp (ABC)$......1p

Fie G centrul de greutate al ΔABC $\Rightarrow$ $G \in AM$ și $\dfrac{AG}{GM} = 2$ …………………………………..1p

Avem imediat $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{AT}{TE}$ $\Rightarrow$(folosind reciproca T Thales) $TG \| EM$, deci $TG \perp (ABC)$ 1p