



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024

CLASA a VI - a

BAREM DE CORECTARE

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem .

Problema 1

Fie $a; b \in \mathbb{N}^*$ și suma $S = \frac{(a,b)}{a} + \frac{[a;b]}{b}$ unde $(a; b)$ este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b , iar $[a; b]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b . Arătați că dacă $S \in \mathbb{N}$ atunci $S = 2$

Soluție:

Fie $d = (a; b)$, atunci $\exists x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = d \cdot x$ și $b = d \cdot y$ și $(x, y) = 1$ 1p

Cum $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$ vom avea $[a, b] = d \cdot x \cdot y$ 1p

Atunci $S = \frac{d}{d \cdot x} + \frac{d \cdot x \cdot y}{d \cdot y}$ de unde obținem $S = \frac{1}{x} + x$ 2p

Cum $S \in \mathbb{N}$ vom avea $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{N}$ și deci $\frac{1}{x} \in \mathbb{N}$ 2p

Finalizare $\frac{1}{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = 2$ 1p



Problema 2

a) Verificați dacă numerele 221 și 222222 sunt divizibile cu 13.

b) Un număr A este format din 2024 cifre de 2 și o cifră de 1. Arătați că A nu este număr prim.

Soluție:

a)

$$221 = 13 \cdot 17; 222\ 222 = 13 \cdot 17\ 094 \dots\dots\dots 1p$$

b)

Singurul număr despre care trebuie arătat că nu este prim este cel pentru care ultima cifră este 1; celelalte nu sunt prime, fiind divizibile cu 2, mai mari decât 2.....1p

$$\text{Fie } A = \underbrace{222 \dots 21}_{2025} = \underbrace{222 \dots 2}_{2022} \cdot 10^3 + 221 \dots\dots\dots 2p$$

Deoarece $2022 : 6$, folosind punctul a) deducem că $\underbrace{222 \dots 2}_{2022} : 13 \dots\dots\dots 2p$

Cum $221 : 13$, rezultă $A : 13$ ($A > 13$) adică A nu este număr prim..... 1p



Problema 3

Fie $x = \frac{5^{n+1} + \overline{abc}}{5^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și \overline{abc} număr natural, scris în baza 10.

- a) Pentru $n=2$, aflați câte numere \overline{abc} există astfel încât x să fie natural.
- b) Arătați că există un număr \overline{abc} astfel încât $x \in \mathbb{N}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 4$.

Soluție:

Soluție: $n=2 \Rightarrow x = \frac{125 + \overline{abc}}{25} \in \mathbb{N} \Rightarrow 25 \mid 125 + \overline{abc} \dots\dots\dots 1p$

Cum $25 \mid 125 \Rightarrow 25 \mid \overline{abc} \Rightarrow 25 \mid \overline{bc} \dots\dots\dots 1p$

$\overline{abc} \in \{\overline{a00}, \overline{a25}, \overline{a50}, \overline{a75}\} \dots\dots\dots 1p$

Finalizare : 36 numere $\dots\dots\dots 2p$

b) $\overline{abc} = 625 \dots\dots\dots 1p$

verifică pentru $n \in \{1,2,3,4\} \dots\dots\dots 1p$



Problema 4

Unghiurile în jurul unui punct O , $\sphericalangle XOY$, $\sphericalangle YOZ$, $\sphericalangle ZOX$ au bisectoarele OA , OB , respectiv OC , iar $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COA$ sunt direct proporționale cu 7, 8, respectiv 9.

- a) Determinați măsurile $\sphericalangle XOY$, $\sphericalangle YOZ$, și $\sphericalangle ZOX$.
- b) Arătați că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle YOB$ și $\sphericalangle XOC$ sunt semidrepte opuse.

Rezolvare

a)

Vom nota măsurile $\sphericalangle XOY$, $\sphericalangle YOZ$, respectiv $\sphericalangle ZOX$ cu $2x$, $2y$, respectiv $2z$. Cum $2x + 2y + 2z = 360^\circ$, $\frac{\sphericalangle AOB}{7} = \frac{\sphericalangle BOC}{8} = \frac{\sphericalangle COA}{9}$ și $\sphericalangle AOB = x + y$, $\sphericalangle BOC = y + z$, $\sphericalangle COA = z + x$ găsim că $\frac{x+y}{7} = \frac{y+z}{8} = \frac{z+x}{9} = 15$2p

Din $x + y = 105^\circ$, $y + z = 120^\circ$, $z + x = 135^\circ$ obținem $x = 60^\circ$, $y = 45^\circ$, $z = 75^\circ$, deci $\sphericalangle XOY = 120^\circ$, $\sphericalangle YOZ = 90^\circ$ și $\sphericalangle ZOX = 150^\circ$ 3p

b)

Măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle YOB$ și $\sphericalangle XOC$ este egală cu $\frac{45^\circ}{2} + 45^\circ + 75^\circ + \frac{75^\circ}{2} = 180^\circ$, deci acestea sunt semidrepte opuse.....2p